3 Teorema de Pitágoras. Aplicaciones

Página 188

1. En los siguientes triángulos rectángulos, se dan dos catetos y se pide la hipotenusa (si su medida no es exacta, dala con una cifra decimal):

a) 37 cm y 45 cm **b) 16 cm y 30 cm**

a = hipotenusa

a) $a = \sqrt{37^2 + 45^2} = \sqrt{3\,394} \approx 58{,}3$ cm

b) $a = \sqrt{16^2 + 30^2} = \sqrt{1\,156} = 34$ cm

2. En los siguientes triángulos rectángulos, se da la hipotenusa y un cateto, y se pide el otro cateto (exactamente o con una cifra decimal):

a) 45 cm y 37 cm **b) 39 cm y 15 cm**

c = cateto que falta

a) $c = \sqrt{45^2 - 37^2} = \sqrt{656} \approx 25{,}6$ cm

b) $c = \sqrt{39^2 - 15^2} = \sqrt{1\,296} = 36$ cm

3. Averigua cómo son los triángulos de lados:

a) 7 cm, 8 cm, 11 cm **b) 11 cm, 17 cm, 15 cm**

c) 34 m, 16 m, 30 m **d) 65 m, 72 m, 97 m**

e) 12 cm, 13 cm, 20 cm **f) 15 m, 36 m, 39 m**

a) $7^2 + 8^2 = 113$; $11^2 = 121$

Como $11^2 > 7^2 + 8^2$, entonces el triángulo es obtusángulo.

b) $11^2 + 15^2 = 346$; $17^2 = 289$

Como $17^2 < 11^2 + 15^2$, entonces el triángulo es acutángulo.

c) $16^2 + 30^2 = 1\,156$; $34^2 = 1\,156$

Como $34^2 = 16^2 + 30^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

d) $65^2 + 72^2 = 9\,409$; $97^2 = 9\,409$

Como $97^2 = 65^2 + 72^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

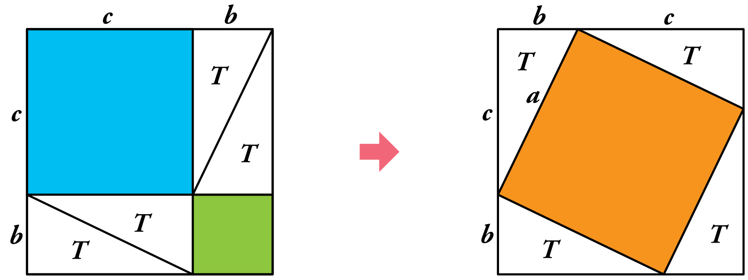
e) $12^2 + 13^2 = 313$; $20^2 = 400$

Como $20^2 > 12^2 + 13^3$, entonces el triángulo es obtusángulo.

f) $15^2 + 36^2 = 1\,521$; $39^2 = 1\,521$

Como $39^2 = 15^2 + 36^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

4. Demuestra el teorema de Pitágoras a partir de las dos descomposiciones del cuadrado de lado $b + c$ que aparecen arriba. Para ello, empieza probando que el cuadrilátero naranja es un cuadrado de lado a.



Puesto que los cuatro triángulos blancos son rectángulos de catetos b y c, sus hipotenusas, que coinciden con el lado del cuadrado, miden a. Por tanto, la figura naranja es un cuadrado de lado a y área a^2.

En el otro cuadrado vuelven a aparecer los mismos triángulos blancos, dejando ahora un cuadrado verde de lado b, cuya área será b^2, y otro azul de lado c y área c^2.

Por último, nos fijamos en los dos cuadrados completos de lado $b + c$. Si a dos cuadrados iguales les quitamos la misma parte (los cuatro triángulos blancos), la parte que queda también será igual. En este caso, en el primer cuadrado nos quedan dos cuadrados más pequeños, el verde y el azul, de áreas b^2 y c^2 y en el segundo cuadrado queda el cuadrado naranja de área a^2.

Por tanto, $b^2 + c^2 = a^2$.

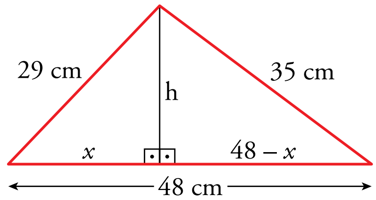
4 Aplicación algebraica del teorema de Pitágoras

Página 190

1. Averigua si el triángulo de lados 29 cm, 35 cm y 48 cm es rectángulo, acutángulo u obtusángulo. Halla la longitud de la altura sobre el lado mayor.

$29^2 + 35^2 = 2066;\ 48^2 = 2304$

Como $48^2 > 29^2 + 35^2$, el triángulo es obtusángulo.



Aplicamos el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + h^2 = 29^2 \\ (48 - x)^2 + h^2 = 35^2 \end{array}\right\} \text{ Restando: } x^2 - (48 - x)^2 = 29^2 - 35^2$$

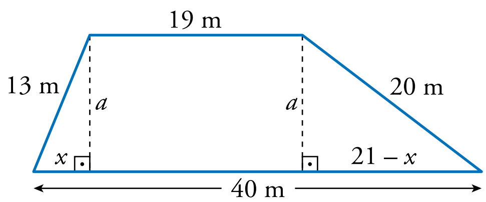
Se resuelve la ecuación y se obtiene $x = 20$ cm.

Calculamos h:

$20^2 + h^2 = 29^2 \ \rightarrow\ h = 21$ cm

La altura sobre el lado mayor mide 21 cm.

2. Los lados de un trapecio miden 13 m, 20 m, 19 m y 40 m. Los dos últimos son paralelos. Halla la altura del trapecio.



Aplicamos el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + x^2 = 13^2 \\ a^2 + (21 - x)^2 = 20^2 \end{array}\right\}$$

Restando: $x^2 - (21 - x)^2 = 13^2 - 20^2$

Se resuelve la ecuación y se obtiene $x = 5$ m.

Ahora se obtiene el valor de a: $a^2 + 5^2 = 13^2 \ \rightarrow\ a = 12$ m

La altura del trapecio mide 12 m.

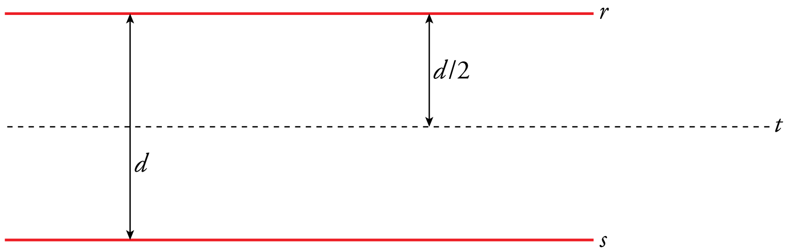
5 Lugares geométricos

Página 191

1. Define como lugar geométrico una circunferencia de centro C y radio 8 cm.

La circunferencia de centro C y radio 8 cm es el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a C es 8 cm: $\overline{CP}$ = 8 cm.

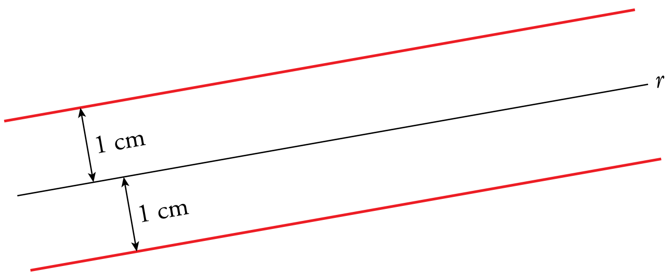
2. Dadas dos rectas paralelas, r y s, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ambas? Dibújalo en tu cuaderno.



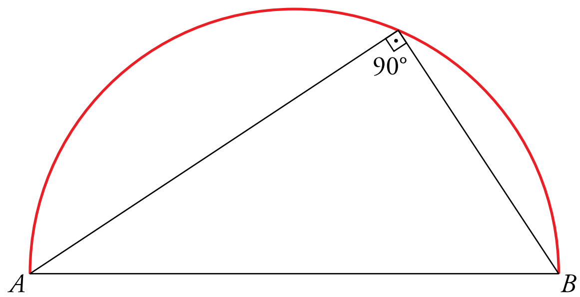
La recta t es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas r y s.

A la recta t se la llama **paralela media** a r y s.

3. Dibuja en negro una recta r. Dibuja en rojo el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a r es 1 cm. (ATENCIÓN: son dos rectas).



4. Dibuja una circunferencia de diámetro AB. Defínela como lugar geométrico (arco capaz de 90°).



La circunferencia de diámetro AB (el arco rojo) es el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve el segmento AB bajo un ángulo de 90°. Se llama arco capaz de 90° para el segmento AB.

7 Áreas de los polígonos

Página 194

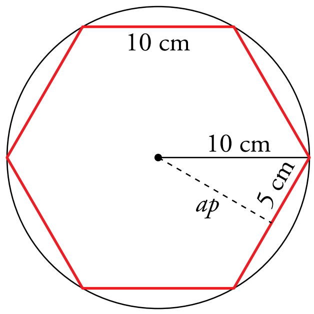
1. Halla el área de un triángulo cuyos lados miden 10 m, 17 m y 21 m.

Aplicamos la fórmula de Herón:

Perímetro = $p = 10 + 17 + 21 = 48$ m; $s = \frac{48}{2} = 24$ m

$A = \sqrt{24 \cdot (24-10) \cdot (24-17) \cdot (24-21)} = \sqrt{7\,056} = 84 \text{ m}^2$

2. Halla el área del hexágono regular en el que cada uno de sus lados mide 10 cm.

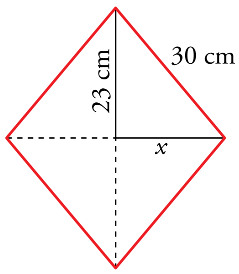


Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar la apotema.

$ap = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \approx 8{,}66$ cm

$A = \frac{10 \cdot 6 \cdot 8{,}66}{2} = 259{,}8 \text{ cm}^2$

3. Halla el área de un rombo de lado 3 dm, sabiendo que una diagonal mide 46 cm.



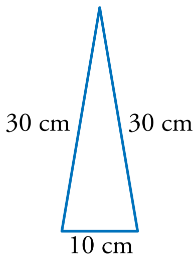
Lado = 3 dm = 30 cm

$x = \sqrt{30^2 - 23^2} = \sqrt{371} \approx 19{,}26$ cm

La otra diagonal mide $2 \cdot 19{,}26 = 38{,}52$ cm

$A = \frac{46 \cdot 38{,}52}{2} = 885{,}96 \text{ cm}^2$

4. Dos de los lados de un triángulo isósceles miden 30 cm y 13 cm. Halla su área.



Los lados iguales del triángulo isósceles miden 30 cm, y el otro lado, 10 cm.

No puede ser de otra forma, porque si los lados iguales miden 10 cm, el otro no podría medir 30 cm.

$(10 + 10 = 20 < 30)$

Aplicamos la fórmula de Herón:

$p = 30 \cdot 2 + 10 = 70$ cm

$s = 35$ cm

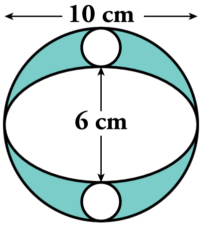
$A = \sqrt{35 \cdot (35-30)^2 \cdot (35-10)} \approx 147{,}9 \text{ cm}^2$

8 Áreas de figuras curvas

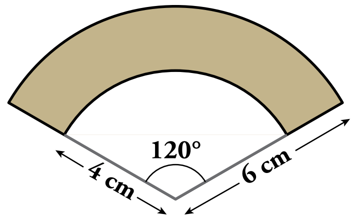
Página 195

1. Halla el área de la parte coloreada en las figuras siguientes:

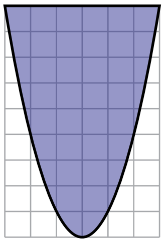
a)



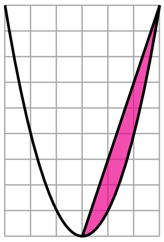
b)



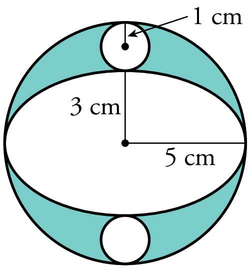
c)



d)



a)



$A_{\text{CÍRCULO GRANDE}} = \pi \cdot 5^2 \approx 78{,}54 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = \pi \cdot 1^2 \approx 3{,}14 \text{ cm}^2$

$A_{\text{ELIPSE}} = \pi \cdot 5 \cdot 3 \approx 47{,}12 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 78{,}54 - 2 \cdot 3{,}14 - 47{,}12 = 25{,}14 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{PARTE COLOREADA}} = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 120°}{360°} - \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 120°}{360°} \approx 20{,}94 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{PARTE COLOREADA}} = \dfrac{2}{3} \cdot 6 \cdot 9 = 36 \text{ u}^2$

d) $A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{3 \cdot 9}{2} = 13{,}5 \text{ u}^2$

$A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = 36 \text{ u}^2$ (según el ejercicio anterior)

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = \dfrac{A_{\text{SECTOR PARÁBOLA}}}{2} - A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{36}{2} - 13{,}5 = 4{,}5 \text{ u}^2$